Требования к проведению муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016-2017 учебном году

1. Общие положения

1.1. Нормативная база

Требования по проведению муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016-2017 учебном году составлены на основании следующих нормативных документов:

- Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации № 1252 от 18.11.2013 «Об утверждении Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников» (ред. от 17.12.2015);
- Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников в 2016/2017 учебном году по математике (утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике, протокол № 2 от 03.06.2016).

1.2. Функции Организационного комитета

Организационный комитет Олимпиады (далее – Оргкомитет) выполняет следующие функции:

- определяет организационно-технологическую модель проведения муниципального этапа олимпиады;
- обеспечивает организацию и проведение муниципального этапа олимпиады в соответствии с утвержденными организатором муниципального этапа олимпиады требованиями к проведению муниципального этапа олимпиады по каждому общеобразовательному предмету, Порядком проведения всероссийской олимпиады школьников и действующими на момент проведения олимпиады санитарно-эпидемиологическими требованиями к условиям и организации обучения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность по образовательным программам основного общего и среднего общего образования;
- осуществляет кодирование (обезличивание) олимпиадных работ участников муниципального этапа олимпиады;
- несет ответственность за жизнь и здоровье участников олимпиады во время проведения муниципального этапа олимпиады по каждому общеобразовательному предмету.

1.3. Функции Жюри

Жюри муниципального этапа Олимпиады выполняет следующие функции:

- принимает для оценивания закодированные (обезличенные) олимпиадные работы участников олимпиады;

- оценивает выполненные олимпиадные задания в соответствии с утвержденными критериями и методиками оценивания выполненных олимпиадных заданий;
- проводит с участниками олимпиады анализ олимпиадных заданий и их решений;
- осуществляет очно по запросу участника олимпиады показ выполненных им олимпиадных заданий;
- представляет результаты олимпиады ее участникам;
- рассматривает очно апелляции участников олимпиады с использованием видеофиксации;
- определяет победителей и призеров олимпиады на основании рейтинга по каждому общеобразовательному предмету и в соответствии с квотой, установленной организатором олимпиады соответствующего этапа;
- представляет организатору олимпиады результаты олимпиады (протоколы) для их утверждения;
- составляет и представляет организатору соответствующего этапа олимпиады аналитический отчет о результатах выполнения олимпиадных заданий по каждому общеобразовательному предмету.
- изучает олимпиадные задания и критерии оценивания заданий муниципального этапа;
- составляет рейтинговые таблицы по результатам выполнения заданий участниками Олимпиады;
- готовит аналитический отчёт о результатах проведения Олимпиады и передает его в Оргкомитет.

2. Структура туров по классам, принципы составления олимпиадных заданий

Олимпиада проводится для каждой из возрастных параллелей 7-х, 8-х, 9-х, 10-х и 11-х классов, состоит из 1 теоретического (письменного) тура и проводится в один день.

Продолжительность тура для учащихся 7-11 классов – 4 астрономических часа.

Задания для каждой возрастной группы включают 5 задач.

3. Перечень материально-технического обеспечения муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуются листы в клетку.

Рекомендуется выдача отдельных листов для черновиков. Участники используют свои письменные принадлежности: ручка с синими чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

4. Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию в процессе муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников

Выполнение заданий математических олимпиад не предполагает использование каких-либо справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

Участникам во время проведения олимпиады запрещено иметь при себе любые электронные вычислительные устройства или средства связи (в том числе и в выключенном виде), учебники, справочные пособия.

5. Критерии и методики оценивания выполненных олимпиадных заданий

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Примеры заданий с решениями

7 класс

1. Вычислите сумму: $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2013\cdot 2014}$.

Решение.

Обратим внимание, что $\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, … $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=\frac{2013}{2014}$.

Ответ: $\frac{2013}{2014}$.

2. В классе число отсутствующих учеников составляет $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствующих. После того, как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько учеников учится в этом классе?

Решение.

Примем за x – число отсутствующих учащихся, тогда число присутствующих – $6x$. $6x-1=5(x+1)$, $x=6$. Итого в классе 42 человека.

Ответ: 42.

3. В футбольном турнире участвуют 36 команд, причём каждые две должны сыграть между собой по одному разу. Известно, что каждая команда сыграла не менее 34 игр. Докажите, что команды можно разбить на три группы по 12 команд так, что внутри каждой группы все игры уже сыграны.

Решение.

Каждой команде осталось провести не более одной игры. Разобьём команды на 18 пар таким образом, чтобы любая команда уже сыграла со всеми командами, кроме, быть может, её пары. Пусть эти пары – (A_1, A_{19}), (A_2, A_{20}), …, (A_{18}, A_{36}). Тогда разобьём команды на три группы, например, так: A_1, A_2, …, A_{12} – первая группа, следующие 12 команд – вторая группа и последние 12 команд – третья группа.

4. Найдите два числа, произведение которых трёхзначное число – есть куб натурального числа, а частное – квадрат того же числа.

Решение.

Пусть числа x и y. Тогда $\begin{cases} xy=a^3, \\ \frac{x}{y}=a^2 \end{cases}$. Поделим уравнения: $y^2=a$ или $a^3=y^6$, значит $xy=y^6$, т.е. $x=y^5$.

Нужно найти число, шестая степень которого есть трёхзначное число. Такое число одно: $3^6=729$. Значит $y=3$, $x=3^5=243$.

Ответ: 243; 3.

5. Два поезда выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии 60 км от середины AB. Если бы первый вышел на 2 часа позже второго, то они встретились бы на середине AB. Если же, наоборот, второй вышел бы на 2 часа позже первого, то они встретились бы на четверти пути от B. Найдите расстояние AB и скорости поездов.

Решение.

Обозначим скорости поездов x, y, расстояние AB через S. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{S}{2}+60}{x}=\dfrac{\frac{S}{2}-60}{y}, \\ 2+\dfrac{S}{2x}=\dfrac{S}{2y}, \\ \dfrac{3S}{4x}=\dfrac{S}{4y}+2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{S+120}{x}=\dfrac{S-120}{y}, (I) \\ \dfrac{4x+S}{x}=\dfrac{S}{y}, \quad (II) \\ \dfrac{3S}{x}=\dfrac{S+8y}{y} \quad (III) \end{cases}$$

. Поделим I на II: $x=\dfrac{60S}{S-120}$.

Поделим I на III: $y=\dfrac{S(S-240)}{4(S+120)}$. Подставим выражения для x, y в (I): $\dfrac{(S+120)(S-120)}{60S}=\dfrac{(S-120)(S+120)\cdot 4}{S(S-240)}$. Откуда $S-240=240$; $S=480$ км, $x=80$ км/ч, $y=48$ км/ч.

Ответ: 480 км; 80 км/ч; 48 км/ч.

8 класс

1. Из пункта A по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними третий. Ещё через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в 1,5 раза, а между третьим и вторым – в 2 раза. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго, если известно, что третий не обгонял первый и второй.

Решение.

Пусть V_1, V_2, V_3 – скорости автомобилей, тогда $S_{1,3}^1=V_1$ – расстояние между первым и третьим автомобилями через час; $S_{2,3}^1=V_2$; $S_{1,3}^2=2V_1-V_3$; $S_{2,3}^2=2V_2-V_3$;

$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{2V_1-V_3}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{V_2}{2V_2-V_3}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2V_1=6V_1-3V_3, \\ V_2=4V_2-2V_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_3=\dfrac{4V_1}{3}, \\ V_3=\dfrac{3V_2}{2} \end{cases}. \quad \dfrac{4V_1}{3}=\dfrac{3V_2}{2},$$

следовательно, $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{9}{8}$.

Ответ: в $\frac{9}{8}$ *раз.*

2. Докажите, что $\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}$ *является целым числом при любом целом* k.

Решение.

Преобразуем выражение: $\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}=\frac{k^3+3k^2+2k}{6}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$. Числитель дроби представлен произведением трёх последовательных чисел, из которых одно делится на 3, одно – на 2. Таким образом, числитель дроби делится на 6, а значит дробь эта сократима, после чего представляет собой целое число.

3. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого есть полный квадрат, треть которого – куб и пятая часть которого – пятая степень.

Решение.

Искомое число должно делиться на 2, 3 и 5. Пусть $x=2^m\cdot 3^n\cdot 5^k$. Наложим на *m, n, k* требования. m должно быть нечётным, делящимся на 3 и 5. $m=15$; *n* – чётное, делится на 5: кроме того оно превышает на 1 число, кратное 3: $n=10$; k – чётное, делится на 3 и превышает на 1 число, делящееся на 5: $k=6$. $x=2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^6$. $\frac{x}{2}=\left(2^7\cdot 3^5\cdot 5^3\right)^2$; $\frac{x}{3}=\left(2^5\cdot 3^3\cdot 5^2\right)^3$; $\frac{x}{5}=\left(2^3\cdot 3^2\cdot 5\right)^5$.

Ответ: $2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^6$.

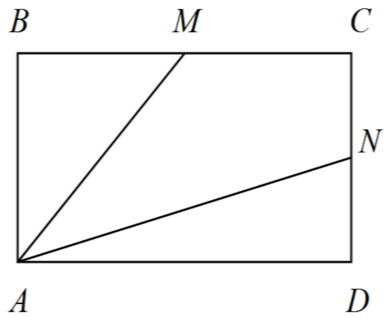
4. На некоторой планете, где в 2014 году состоялась первая встреча землян с инопланетянами, встретились несколько землян, имеющих 4 конечности, и несколько инопланетян, которые имели по 7 конечностей. Сколько было землян на встрече, если всего конечностей было 53?

Решение.

Обозначим число землян *x*, а инопланетян – *y*, а поскольку всего конечностей было 53, получаем уравнение: $4x+7y=53$. Выражая их него *x*, получаем $x=13-2y+\frac{y+1}{4}$. Тогда $y+1$ делится на 4. учитывая, что $y<53:7$, то есть $y<8$, получаем $y=7$ при $x=1$ или $y+3$ при $x=8$. А так как землян было несколько, то $x=8$.

Ответ: 8.

5. В прямоугольнике ABCD вершину A соединили с серединами сторон BC и CD. Может ли один из отрезков оказаться вдвое длиннее другого?



Решение.

Обозначим стороны $AD = 2a$, $CD = 2b$. Тогда $BM = a$, $ND = b$. Применим теорему Пифагора к ΔABM и ΔADN: $AM^2 = 4b^2 + a^2$, $AN^2 = 4a^2 + b^2$. Пусть $AN = 2AM$, тогда $AN^2 = 4AM^2$, откуда получаем, что $b = 0$, чего не может быть. Значит, предположение неверно.

9 класс

1. Докажите, что $5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2014}$ *делится на 6.*

Решение.

$5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2014} = 5(1+5) + 5^3(1+5) + \ldots + 5^{2013}(1+5) =$ $6(5 + 5^3 + \ldots + 5^{2013})$. Так как первый множитель делится на 6, то и всё произведение делится на 6.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z + u = 8, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 20, \\ xy + xu + zy + zu = 16, \\ xyzu = 9. \end{cases}$

Решение.

Проведём следующие действия:

1) $(x + y + z + u)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 2xy + 2xz + 2xu + 2yz + 2yu + 2zu = 64$:

$20 + 2(xy + xu + zy + zu) + 2(xz + yu) = 64$; $10 + 16 + xz + yu = 32$; $xz + yu = 6$. Так как $xyzu = 9$, то $xz = 3$, $yu = 3$.

2) $xy + xu + zy + zu = x(y+u) + z(y+u) = (x+z)(y+u) = 16$. Так как $x + y + z + u = 8$, то $x + z = y + u = 4$.

3) $\begin{cases} x + z = 4, \\ xz = 3. \end{cases}$ $\begin{cases} y + u = 4, \\ yu = 3. \end{cases}$ Откуда получаем 4 решения: $(1; 1; 3; 3)$, $(3; 1; 1; 3)$, $(1; 3; 3; 1)$, $(3; 3; 1; 1)$.

Ответ: $(1; 1; 3; 3)$, $(3; 1; 1; 3)$, $(1; 3; 3; 1)$, $(3; 3; 1; 1)$.

3. Трое рабочих должны изготовить некоторое количество деталей. Сначала к работе приступил первый рабочий, а через некоторое время к нему присоединился второй. Через 2 часа, когда $\frac{1}{6}$ *часть работы была выполнена, к работе приступил третий рабочий. Работу они закончили одновременно. Сколько времени работал первый рабочий, если каждый* *рабочий изготовил одинаковое количество деталей? Известно, что первый и второй рабочие, работая вместе, могут изготовить требуемое задание на 9 часов раньше, чем третий рабочий, если бы он работал один.*

Решение.

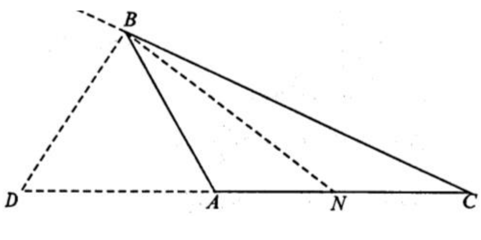
Пусть x – время работы 1-го рабочего над всем заданием; y и z – соответственно для 2-го и 3-го рабочих. $\frac{1}{x}$ – часть работы, которую выполняет 1-й рабочий за час; $\frac{1}{y}$ – 2-й рабочий. Тогда $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ – часть работы, которую выполняю оба рабочих за час. А вся работа будет выполнена этими двумя рабочими за $\frac{xy}{x+y}$ часов. Тогда по условию последней части задачи $z=\frac{xy}{x+y}+9$, т.е. $z=\frac{xy+9x+9y}{x+y}$.

Все трое рабочих выполнили $\frac{5}{6}$ всей работы, из этой доли 3-й рабочий выполнил $\frac{1}{3}$ часть. Значит 1-й и 2-й рабочие из этой доли ($\frac{5}{6}$) выполнили $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ часть работы. Поэтому: $\frac{1}{2}\cdot\frac{xy}{x+y}=\frac{z}{3}$ или $\frac{xy}{2(x+y)}=\frac{xy+9x+9y}{3(x+y)}$. Откуда $xy=18(x+y)$, т.е. $\frac{xy}{x+y}=18$. Значит, во-первых, третий рабочий работал $18:2=9$ часов, второй рабочий – 11 часов, во-вторых, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}$; $y=33$; $\frac{1}{x}=\frac{1}{18}-\frac{1}{33}=\frac{5}{198}$; $x=39{,}6$; $\frac{x}{3}=13{,}2$ часа.

Ответ: 13,2 ч.

4. Докажите, что в треугольнике, у которого разность углов при основании равна 90^0, биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине равны между собой.

Решение.



$\angle C=x$, $\angle BAC=90^0+x$, $\angle MBA=90^0+2x$. Следовательно, $\angle DBA=45^0+x$, $\angle BDA=90^0+x-45^0-x=45^0$, $\angle DBN=90^0$. $\angle BND=45^0$, следовательно, $DB=BN$.

5. В комнате собрались 8 человек. Некоторые из них лгут, а остальные всегда говорят правду. Один из собравшихся сказал: «Здесь нет ни одного честного человека». Второй сказал: «Здесь не больше одного честного *человека». Третий сказал: «Здесь не более двух честных людей» и т.д. до восьмого, который сказал: «Здесь не более семи честных людей». Сколько в комнате честных людей? Ответ обоснуйте.*

Решение.

Начнём рассуждения с высказывания восьмого человека: «Здесь не более семи честных людей». Если восьмой человек говорит правду, то всё хорошо. Если же он лжёт, то это означает, что в комнате 8 честных людей, а это противоречит тому, что восьмой человек лжёт. Значит, восьмой не может лгать, то есть он говорит правду. Первый человек сказал, что в комнате нет честных людей. Но мы выяснили, что восьмой – честный человек, значит, первый солгал, то есть он лжец. Изучая высказывание седьмого человека, выясняем, что он не может быть лжецом, иначе в комнате должно было быть 7 или 8 честных людей. Но первый лжец, поэтому седьмой должен быть честным. Рассуждая далее аналогично, получаем, что второй, третий и четвёртый лгут, а шестой и пятый говорят правду. В результате мы выяснили, что в комнате 4 честных человека.

Ответ: 4 человека.

10 класс

1. Что больше 200! или 100^{200} ?

Решение.

Возьмём отношение первого произведения ко второму в таком порядке:

$$\left(\frac{1}{100}\cdot\frac{199}{100}\right)\left(\frac{2}{100}\cdot\frac{198}{100}\right)\left(\frac{3}{100}\cdot\frac{197}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{99}{100}\cdot\frac{101}{100}\right)\cdot\frac{100}{100}\cdot\frac{200}{100}=$$

$$=\frac{(100-99)(100+99)}{100^2}\cdot\frac{(100-98)(100+98)}{100^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(100-1)(100+1)}{100^2}\cdot 1\cdot 2=$$

$=\frac{100^2-99^2}{100^2}\cdot\frac{100^2-98^2}{100^2}\cdot\ldots\cdot\frac{100^2-1^2}{100^2}\cdot 1\cdot 2$. Все дроби меньше 1. Число 2 компенсируется, например, первой дробью, тогда $200!<100^{200}$.

Ответ: $200!<100^{200}$.

2. Одному из нескольких мальчиков разного возраста 10 лет, а возрасты остальных составляют арифметическую прогрессию, причём старшему из них 13 лет. Сколько лет каждому мальчику, если возраст десятилетнего составляет и в дальнейшем будет составлять $\frac{1}{5}$ *суммы возрастов всех мальчиков (считая и десятилетнего)?*

Решение.

Так как возраст 10-летнего мальчика составляет и в дальнейшем будет составлять $\frac{1}{5}$ суммы возрастов всех мальчиков, то в настоящее время сумма возрастов остальных мальчиков 40. В следующем году сумма возрастов остальных мальчиков составит: $55-11=44$, откуда можно сделать вывод, что остальных мальчиков было – четверо.

Имеем: $n=4, a_4=13, S_4=40$. $S_4=\frac{a_1+a_4}{2}\cdot 4=2(a_1+a_4)$; $40=2(a_1+13)$; $a_1=7$; $a_4=a_1+3d$; $d=(13-7):3=2$.

Ответ: 7, 9, 11, 13.

3. Если корни уравнения $px^2+nx+n=0$ *относятся как a к b, то докажите справедливость соотношения* $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{n}{p}}=0$.

Решение.

$x_1+x_2=-\frac{n}{p}$; $x_1+x_2+\frac{n}{p}=0$. $x_1\cdot x_2=\frac{n}{p}$; $x_1=\frac{n}{p\cdot x_2}$; $\frac{x_1}{x_2}=\frac{n}{p\cdot x_2^2}=\frac{a}{b}$.

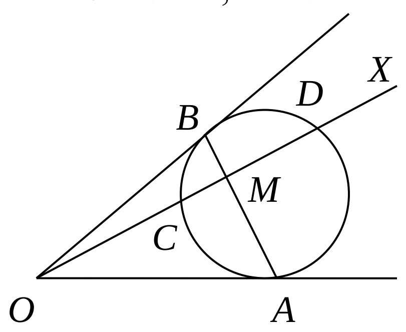
$x_2^2=\frac{bn}{ap}$; $x_2=\sqrt{\frac{bn}{ap}}$; $x_1=\frac{n\sqrt{ap}}{p\sqrt{bn}}=\frac{\sqrt{an}}{\sqrt{pb}}$; $\sqrt{\frac{an}{pb}}+\sqrt{\frac{bn}{ap}}+\frac{n}{p}=0$;

$\sqrt{\frac{n}{p}}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{n}{p}}\right)=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{n}{p}}=0$.

4. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B. Луч OX пересекает эту окружность в точках C и D так, то $OC=CD=1$. *Если M – точка пересечения луча OX и отрезка AB, то чему равна длина отрезка OM?*

Решение.

Заметим, что $\angle CBO=\angle BDO$, Поскольку OB – касательная. Следовательно, треугольники OBC и ODB подобны, откуда $BO^2=OC\cdot OD=2$ (т.е. $BO=\sqrt{2}$) и $\frac{BD}{CB}=\frac{OD}{OB}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.



Аналогично, $\frac{AD}{AC}=\sqrt{2}$. Треугольники CMB и AMD подобны, следовательно, $\frac{CM}{AM}=\frac{CB}{AD}$. Из подобия треугольников CMA BMD получаем, что $\frac{AM}{MD}=\frac{AC}{BD}$. Перемножая последние два равенства, имеем $\frac{CM}{MD}=\frac{AC\cdot CB}{AD\cdot DB}=\frac{1}{2}$. То есть $CM=\frac{1}{3}$, а значит, $OM=\frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

5. На каждой из $n \geq 3$ *карточек написана цифра. Располагая эти карточки в ряд всеми возможными способами, мы получаем* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ *натуральных чисел. Может ли их произведение быть числом, десятичная запись которого состоит из одних единиц?*

Решение.

Все цифры должны быть нечётными. Заметим, что перестановка местами двух первых цифр такого числа не меняет остаток от деления на 4. Поэтому количество чисел, дающих остаток 3 при делении на 4, которые можно получить таким способом, чётно. Следовательно, произведение всех чисел будет давать остаток 1, значит это не число вида 111…11.

11 класс

1. Решите уравнение $x^2 - 2x\sin xy + 1 = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение следующим образом: $\left(x^2 - 2x\sin xy + \sin^2 xy\right) + \left(1 - \sin^2 xy\right) = \left(x - \sin xy\right)^2 + \cos^2 xy = 0$. Это возможно, когда оба выражения – нули.

а) $\cos xy = 0$; $xy = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $y = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{x}$, $k \in Z$;

б) $x - \sin xy = 0$; $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \pm 1$, $k \in Z$.

Тогда $\left(-1; -\frac{\pi}{2} - \pi k\right)$, $\left(1; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Ответ: $\left(-1; -\frac{\pi}{2} - \pi k\right)$, $\left(1; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

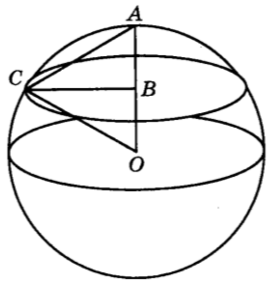
2. Существуют ли четыре различных числа таких, что любые два из них – x *и* y *– связаны соотношением* $x^{10} + x^9 y + x^8 y^2 + ... + xy^9 + y^{10} = 1$*?*

Решение. Домножая на $x - y$, получаем, что $x^{11} - y^{11} = x - y$, т.е. $x^{11} - x = y^{11} - y$. Отсюда многочлен $f(t) = t^{11} - t + C$ должен иметь четыре различных корня, что невозможно, так как $f''(t)$ имеет лишь один корень.

Ответ: нет, не существует.

3. На деревянном шаре нарисована окружность циркулем, раскрытым на тот же радиус, что и у шара. Какова длина этой окружности?

Решение.



На рисунке обозначим $AO = AC = R$ – радиус шара. Пусть $AB = x$, $BC = r$. Применяя теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам ABC и CBO, получим: $\begin{cases} x^2 + r^2 = R^2, \\ r^2 + (R - x)^2 = R^2 \end{cases}$. Решая данную систему, найдём $x = \frac{R}{2}$, тогда $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. А значит, длина искомой окружности будет равна $\pi R\sqrt{3}$.

Ответ: $\pi R\sqrt{3}$.

4. Известно, что числа a, b *и* c *связаны соотношением* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$. *Докажите, что тогда какие-нибудь два из этих чисел равны по абсолютной величине и отличаются знаком.*

Решение.

Сложив дроби в левой части равенства: $\frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{1}{a + b + c}$ или

$$3abc + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 = abc;$$
$$\left(abc + a^2c + ac^2\right) + \left(abc + b^2c + bc^2\right) + ab(a + b) = 0,$$
$$ac(a + b + c) + bc(a + b + c) + ab(a + b) = (a + b + c)c(a + b) + ab(a + b) =$$
$$= (a + b)[(a + b + c)c + ab] = (a + b)\left(c^2 + c(a + b) + ab\right) = 0$$

1) $a + b = 0$; $a = -b$

2) $c^2 + c(a + b) + ab = 0$; $c_1 = -a$; $c_2 = -b$.

5. Для участников математической олимпиады и членов жюри было приготовлено конфет столько же, сколько пирожков и стаканов кофе вместе. Каждый школьник съел по конфете и выпил по стакану кофе, после чего осталось стаканов кофе и конфет вместе столько, сколько пирожков. Найдётся ли хотя бы один стакан кофе для членов жюри?

Решение.

Обозначим число конфет, пирожков, стаканов кофе и участников олимпиады соответственно k, p, c, y. Тогда, учитывая условие задачи, получаем следующую систему уравнений: $\begin{cases} k = p + c, \\ c - y + k - y = p \end{cases}$. Подставив k из первого уравнения системы во второе и упростив второе уравнение, получаем, что $c = y$, то есть число участников олимпиады равно числу стаканов кофе. А так как каждый участник олимпиады выпил по стакану кофе, то для жюри стаканов кофе не осталось.

Ответ: нет, не найдётся.

6. Процедура разбора заданий и показа олимпиадных работ

Основная цель процедуры разбора заданий – знакомство участников Олимпиады с основными идеями решения каждого из предложенных заданий, а также с типичными ошибками, допущенными участниками Олимпиады при выполнении заданий, знакомство с критериями оценивания.

В процессе проведения разбора заданий участники Олимпиады должны получить всю необходимую информацию по поводу объективности оценки их работ, что тем самым приводит к уменьшению числа необоснованных апелляций по результатам проверки решений.

В ходе разбора заданий представители Жюри подробно объясняют критерии оценивания каждого из заданий.

Участник имеет право задать членам Жюри вопросы.

7. Порядок проведения апелляции

Показ работы и подача апелляции производится в день ознакомления с результатами олимпиады. Апелляция о несогласии с выставленными баллами рассматривается очно (с участием самого участника олимпиады) с использованием средств видеофиксации.

8. Порядок подведения итогов Олимпиады

Протоколы муниципального этапа олимпиады с указанием оценок всех участников передаются организатору олимпиады для их утверждения.